УДК 519.112.71

ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАФИКА РАБОТ

М. Г. Землянухин, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.12.2013 г.

Аннотация. В работе рассмотрена задача о равномерном назначении в случае, когда имеется общий график работ и, когда такового нет. Показана возможность сведения задачи к модели открытого транспортного типа с ограничениями на пропускную способность.
Ключевые слова: дискретная оптимизация, задача о дополнительном назначении, многокритериальная задача.
Abstract. In this paper we have studied the problem of uniform assignment whether there is or there is not an overall schedule of works. It is shown that the problem can be reduced to the model of an open transport type with the limitations of carrying capacity.
Keywords: discrete optimization, the problem of additional function, multicriterion problem.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача о дополнительном назначении n работников для выполнения заданного объёма работ в течение некоторого периода из m дней ([1], [2]). При этом известно:

– вектор S, задающий объёмы работ на каждый из m дней;

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$$

– каждый человек выполняет в день одну работу;

– матрица R возможностей каждого работника;

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й человек может} \\ & \text{работать в } j\text{-й день,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m$$

– матрица A обязательных назначений;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й человек обязан} \\ & \text{работать в } j\text{-й день,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Заметим, что возможен вариант такой, что все a_{ij} равны 0.

Для корректности задачи очевидно должны быть выполнены условия достаточности числа работников на каждый день:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} \ge s_j, \ \ , j = 1,\ldots,m.$$

т.е. число работников, которые могут работать в определённый день должно быть не меньше числа запланированных работ на этот день.

Обязательные назначения часто фиксируют лишь часть выполненных работ, т.е. существует l:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{il} < s_l, \quad , l = 1,\ldots,m.$$

Требуется осуществить дополнительные назначения так, чтобы все работы были выполнены. При этом каждый работник желает иметь минимальное число дополнительных назначений.

Для математической формализации задачи вводим переменные x_{ij}.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й человек назначен} \\ & \text{работать в } j\text{-й день,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Математическая модель в этом случае выглядит следующим образом:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \to \min, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(1-a_{ij})x_{ij} = s_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (2)$$

$$j = 1,\ldots,m,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m. \qquad (3)$$

Здесь

$$s_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad j = 1,\ldots,m$$

количество работ, которые необходимо выполнить. В результате, получена многокритериальная задача с булевыми переменными.

Полученную многокритериальность предлагается реализовать с помощью известного принципа гарантированного результата. Это находится в соответствии с пожеланием о равномерности назначений. В результате математическая модель может быть переписана в следующем виде:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \right) \to \min \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(1-a_{ij})x_{ij} = s_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (5)$$

$$j = 1,\ldots,m,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m. \qquad (6)$$

Введём дополнительную переменную

$$\mu = \max_{i=\overline{1,n}} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \right) \to \min .$$

Тогда линейная целочисленная задача принимает вид:

$$\mu \to \min \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(1-a_{ij})x_{ij} = s_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (8)$$

$$j = 1,\ldots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le \mu, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (9)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m. \qquad (10)$$

Здесь μ – новая переменная, принимающая целочисленные значения.

Заметим, что при каждом фиксированном значении μ задача имеет ограничения транспортного типа. Действительно, фиксируя $\mu = \mu_0$ и обозначая

$$s_j - \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \ -\ \text{через } b_j, \quad j = 1,\ldots,m$$

$$\mu^0 - \text{через } a_j, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Ограничения задачи можно переписать следующим образом

$$\sum_{i} x_{ij} = b_j$$

$$\sum_{j} x_{ij} \le a_i$$

$$i = 1,\ldots,n, \ \ j = 1,\ldots,m.$$

Для совместности данных ограничений, как следует из теории транспортных задач, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\sum_{j} b_j \le \sum_{i} a_i$$

$$i = 1,\ldots,n, \ \ j = 1,\ldots,m.$$

В нашем случае это означает, что должно выполняться условие

$$\sum_{j} b_j \le n\mu^0 .$$

От сюда следует, что для μ должно быть выполнено неравенство

$$\mu \ge \left[\frac{\sum b_j}{n} \right].$$

Таким образом, в качестве нижней оценки значения целевой функции μ модели (7)–(10) можно использовать

$$\mu^* = \begin{cases} \left[\dfrac{\sum b_j}{n} \right], & \text{если } \dfrac{\sum b_j}{n} - \text{целое число}, \\ \left[\dfrac{\sum b_j}{n} \right] + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим далее следующую задачу транспортного вида:

$$\sum_{i} \sum_{j} M_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = s_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad j = 1,\ldots,m \qquad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le \mu^*, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m \qquad (13)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m, \qquad (14)$$

где

$$M_{ij}=\begin{cases}1, & если\ \ r_{ij}(1-a_{ij})=1\\ +\infty, & иначе,\end{cases}$$

$$i=1,\ldots,n,\ \ j=1,\ldots,m,$$

т. е. M_{ij} – фиксируют штрафы за назначения, противоречащие его возможностям.

Такая модель может рассматриваться как открытая транспортная задача с запретами и с булевыми переменными.

Заметим, что если заменить все требование

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\\ 0\end{cases}\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m$$

на ограничение $0\le x_{ij}\le 1,$ то метод потенциалов транспортной задачи с ограничениями на пропускную способность получит оптимальную точку решения, координаты которой будут состоять из 0 и 1. Окончательно задачу можно переписать в виде:

$$\sum_i\sum_j M_{ij}x_{ij}\to\min \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=s_j-\sum_{i=1}^{n}a_{ij},\quad j=1,\ldots,m \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\le\mu^*,\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m \qquad (17)$$

$$0\le x_{ij}\le 1 \qquad (18)$$

$$M_{ij}=\begin{cases}1, & если\ \ r_{ij}(1-a_{ij})=1\\ +\infty, & иначе,\end{cases}$$

$$i=1,\ldots,n,\ \ j=1,\ldots,m.$$

Полученная модель представляет собой открытую транспортную задачу с запретами и с ограничениями на пропускную способность [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кропанов В. А. Равномерное назначение работ минимальной стоимости / В. А. Кропанов, В. С. Рублёв // Дискретная математика. – Т. 13. – Вып. 4/2001. – 144 с.

2. *Рублёв В. С.* Выбор критерия оптимизации в задаче о равномерном назначении / В. С. Рублёв, Н. Б. Чаплыгина // Дискретная математика. – Т. 17. – Вып. 4/2005. – 150 с.

3. Гольштейн Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1969. – 382 с.

Землянухин Максим Геннадьевич – магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет, тел. 8-920-405-08-36, e-mail: wiking182@yandex.ru

Чернышова Галина Дмитриевна – доцент кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, к.т.н., Воронежский Государственный Университет, тел. 8 903 854 70 78, e-mail: chern@vsau.ru

Zemlyanukhin M. G. – postgraduate of the department of Mathematical Methods of Operations Research; the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Voronezh State University.

Chernyshova G. D. – docent of the department of Mathematical Methods of Operations Research; The Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Candidate of Technical Sciences; Voronezh State University.